FINAŁ 10 marca 2007 r.

KLASA PIERWSZA - POZIOM PODSTAWOWY

Czas pisania 90 minut

ZADANIE 1

Największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych wynosi 6, a ich najmniejsza wspólna wielokrotność tych liczb równa jest 210. Znajdź te liczby.

ZADANIE 2

Uprość wyrażenie:

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

ZADANIE 3

Narysuj wykres funkcji spełniającej równocześnie następujące własności:

- dziedziną funkcji jest $\langle -2,5\rangle$,
- zbiorem wartości funkcji jest $\langle -3,1) \cup \langle 2,5\rangle$,
- miejscem zerowym funkcji jest -1,
- funkcja jest rosnąca w $\langle -2,2\rangle$.

ZADANIE 4

Jeżeli samochód rusza spod świateł na skrzyżowaniu A i jedzie ze średnią prędkością 50 km/h, to samochód ten płynnie przejedzie przez odległe o 600 m skrzyżowanie B, bo na skrzyżowaniu B kierowca będzie miał światło zielone.

a) Oblicz, ile sekund będzie czekał na zielone światła na skrzyżowaniu B samochód. Który ze skrzyżowania A jechał ze średnią prędkością 70 km/h.

b) Oblicz z jaką prędkością jechał samochód ze skrzyżowania A, jeżeli na skrzyżowaniu B czekał 6 sekund na zielone światła.

ZADANIE 5

W trójkącie ABC $\left(|\sphericalangle C| = 90^\circ\right)$ przedłużono bok AC poza punkt C o odcinek CB_1, $|CB_1| = |CB|$ oraz bok BC poza punkt C o odcinek CA_1, $|CA_1| = |CA|$, i połączono punkty A_1 i B_1. Wykaż, że przedłużenie wysokości CD trójkąta ABC jest środkową CE trójkąta A_1B_1C.

FINAŁ 10 marca 2007 r.

KLASA PIERWSZA - POZIOM ROZSZERZONY

Czas pisania 90 minut

ZADANIE 1

Jeśli pewne działanie, oznaczymy je $\otimes$, jest wykonalne w zbiorze A i istnieje taki element $e \in A$, że dla każdego $a \in A$ spełnione są warunki $a \otimes e = a$ i $e \otimes a = a$, to e nazywamy elementem neutralnym działania.

a) Jaka liczba jest elementem neutralnym mnożenia w zbiorze liczb rzeczywistych, a jaka dodawania w zbiorze liczb rzeczywistych?

b) W zbiorze liczb rzeczywistych określone zostało działanie $\otimes$ w następujący sposób $a \otimes b = a + b - 2$. Oblicz $(7 \otimes 3) \otimes 5$. Sprawdź, czy 2 jest elementem neutralnym działania $\otimes$.

c) Sprawdź, czy 2 jest elementem neutralnym działania $\otimes$ określonego w zbiorze liczb rzeczywistych następująco $a \otimes b = a - b + 2$.

ZADANIE 2

Wyznacz wartość parametru a, tak aby funkcja $y = ||x - 2| - 1| - a$ miała trzy miejsca zerowe.

ZADANIE 3

Dzieląc liczbę x przez 13, otrzymujemy resztę, a dzieląc liczbę y przez 13 otrzymujemy resztę 5. Uzasadnij, że dzieląc iloczyn xy przez 13 otrzymamy resztę 2.

ZADANIE 4

Usuwając niewymierność z mianownika liczby $\frac{2}{3 - \sqrt[3]{7}}$ skorzystamy ze wzoru $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

- Zauważmy, że $\left(3 \quad \sqrt[3]{7}\right)\left(3^2 + 3\sqrt[3]{7} + \left(\sqrt[3]{7}\right)^2\right) = 3^3 \quad \left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 20$.
- Mnożąc licznik i mianownik danej liczby przez $3^2 + 3\sqrt[3]{7} + \left(\sqrt[3]{7}\right)^2$ otrzymujemy:

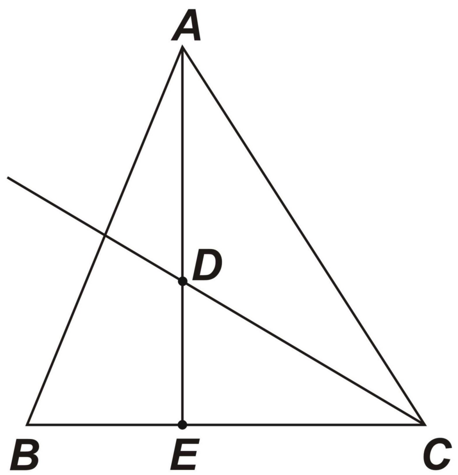
$$\frac{2\left(3^2 + 3\sqrt[3]{7} + \left(\sqrt[3]{7}\right)^2\right)}{\left(3 \quad \sqrt[3]{7}\right)\left(3^2 + 3\sqrt[3]{7} + \left(\sqrt[3]{7}\right)^2\right)} = \frac{2\left(9 + 3\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}\right)}{20} = \frac{9 + 3\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}}{10}$$

Korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia, usuń niewymierność z mianownika liczby:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{4} + 2}$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}}$

ZADANIE 5

Dwusieczna CD dzieli wysokość AE w stosunku 3:4 $\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{3}{4}$. $|AE| = 21$. Jaką długość ma wysokość trójkąta ADC opuszczona z wierzchołka D.



Finał.
Klasa druga, poziom podstawowy.
Czas pisania 60 min.

Zadanie 1

Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami równania $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, ponadto wiadomo, że $x_1 < x_2 < x_3$. Zbuduj równanie postaci $y^3 + by^2 + cy + d = 0$, którego rozwiązaniami są liczby :

a) $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_2 \cdot x_3, y_3 = x_1^2 + x_3$

b) $y_1 = y_2 = x_1 + x_2 + x_3, y_3 = \frac{x_2^2}{4}$.

Zadanie 2

Jedna z przekątnych trapezu dzieli go na dwa trójkąty, których stosunek pól równy jest 1:2. Znajdź stosunek pól trójkątów na jakie dzieli ten trapez druga przekątna.

Zadanie 3

Wykaż, że każda liczba postaci $1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{- }zer}2\underbrace{00\ldots0}_{n\text{- }zer}1$, gdzie $n \in N$, jest kwadratem liczby naturalnej .

Zadanie 4

Funkcja f każdej liczbie całkowitej dodatniej przyporządkowuje liczbę jej dzielników naturalnych.

a) Oblicz $f(12)$.

b) Funkcja g określona jest następująco : $g(n) = f(n) - 2$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n. Ile miejsc zerowych należących do zbioru $\{1,2,3,...20\}$ ma funkcja g ?

c) Jaką własność mają te liczby n, dla których $f(n)$ jest liczbą nieparzystą?

Zadanie 5

Zbiory A i B określone są następująco : $A = \{(x, y) : x \in C \wedge y \in R \wedge |x - 3| < 2\}$,
$B = \{(x, y) : x \in R \wedge y \in R \wedge y^2 < 9\}$. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory $A \cap B, A \cup B$
.

Powodzenia !

Finał.
Klasa druga, poziom rozszerzony.
Czas pisania 60 min.

Zadanie 1

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór $A \cap B$ jeśli $A = \{(x,y): x,y \in R \wedge x^2 + y^2 \geq 4\}$
oraz

$$B = \left\{(x,y): x,y \in R \wedge |y| = |ax|, gdzie \quad a \quad jest\ pierwiastkiem \quad równania \quad (2a-1)(a^2 - 3a + 2) = 0\right\}$$

Zadanie 2

Dana jest funkcja $f(x) = \min(3, x^2 - 5x + 7)$, gdzie $\min(a,b)$ oznacza nie większą z licz a,b.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentów 0, 2 i 4.
b) Wyznacz zbiór wartości funkcji f.
c) Dla $x \in \langle -2;5\rangle$ naszkicuj wykres tej funkcji .

Zadanie 3

Oblicz $a^3 + b^3 + c^3$ wiedząc, że $a + b + c = 0$ oraz $abc = 2$.

Zadanie 4

Liczba 2 jest pierwiastkiem równania $x^3 - (4p+2)x^2 + (8p-5)x + 10 = 0$. Wyznacz wartość parametru p, wiedząc, że dany pierwiastek jest średnią arytmetyczną pozostałych.

Zadanie 5

Punkt W jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta przechodząca przez punkty A i W przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D $(D \neq A)$. Wykaż, ze trójkąt BDW jest równoramienny.

Powodzenia !