Drugi Pomorski Konkurs Matematyczny

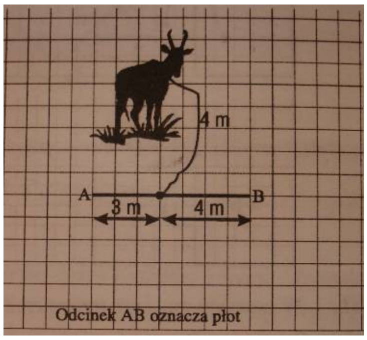
FINAŁ
18 MARCA 2006r.
Klasa pierwsza, poziom podstawowy.
Czas pisania 90 min.

Zadanie 1 (5 pkt.)

Dane są liczby: $p = \left[\left(3+8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(3-8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ oraz $q = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 1{,}5^{-1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}{3^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5}$.

Sprawdź, że $p = 3q$.

Zadanie 2 (3 pkt.)



Koza pasie się uwiązana do kołka (jak na rysunku), odcinek AB oznacza wysoki płot, którego koza nie przeskoczy. Oblicz pole obszaru, po którym może paść się koza.

Zadanie 3 (5 pkt.)
W tabeli podano dla porównania dwa plany taryfowe w ofercie sieci komórkowej Idea:

Plan taryfowy	Idea Optima 15	Idea optima 30
Wysokość abonamentu	30 zł	40 zł
Liczba bezpłatnych minut i bezpłatnych SMS-ów w abonamencie (koszt 1min=koszt 4 SMS-ów)	15 minut lub 60 SMS	30 minut lub 120 SMS
Koszt 1min. Po przekroczeniu pakietu bezpłatnych minut	1 zł 65 gr.	1 zł 35 gr.
Koszt pojedynczego SMS-a po przekroczeniu pakietu bezpłatnych SMS-ów	24 gr.	24 gr.

a) Który plan taryfowy powinna wybrać osoba, która rozmawia średnio 20 minut miesięcznie? Odpowiedź uzasadnij.
b) Pani Topolska w sierpniu zapłaciła rachunek w wysokości 47 zł 4 gr., korzystając z taryfy Idea Optima 15. Przeglądając rachunek Pani Topolska zauważyła, że liczba minut po przekroczeniu pakietu bezpłatnych minut była dwa razy mniejsza niż liczba wysłanych SMS-ów ponad limit. Oblicz ile dodatkowych minut (ponad limit) rozmawiała w sierpniu pani Topolska.
c) Dla obu planów taryfowych napisz wzory wyrażające zależność między wysokością rachunku a liczbą wykorzystanych dodatkowych minut dla osoby, która nie wysłała dodatkowych SMS-ów.

Zadanie 4 (3 pkt.)

Udowodnij, ze jeżeli $a \neq b$ i $a + b = 2c$, to $\dfrac{a}{a-c} + \dfrac{b}{b-c} = 2$

Zadanie 5 (4 pkt.)

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in C \\ x+1 & \text{dla } x \in R \setminus C \end{cases}$

a) Oblicz: $f(2)$, $f(-5)$, $f(1{,}5)$
b) Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ w przedziale $< -2; 2 >$.

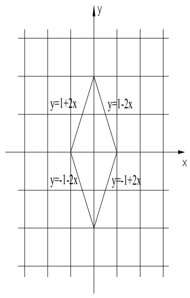
Drugi Pomorski Konkurs Matematyczny

FINAŁ
18 MARCA 2006r.
Klasa pierwsza, poziom rozszerzony.
Czas pisania 90 min.

Zadanie 1 (4 pkt.)

Aby narysować na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek $2|x| + |y| = 1$ należy zastosować następującą metodę:

- Korzystając z definicji wartości bezwzględnej dla zmiennych x, y rozpatrujemy cztery przypadki:
  1. dla $x \geq 0$ i $y \geq 0$ otrzymujemy zależność $y = 1 - 2x$,
  2. dla $x < 0$ i $y \geq 0$ otrzymujemy zależność $y = 1 + 2x$,
  3. dla $x < 0$ i $y < 0$ otrzymujemy zależność $y = -1 - 2x$,
  4. dla $x \geq 0$ i $y < 0$ otrzymujemy zależność $y = -1 + 2x$,
- Następnie w danych ćwiartkach układu współrzędnych rysujemy wykresy otrzymanych funkcji.



Stosując przedstawioną wyżej metodę narysuj na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek $|x| - 2|y| = 2$.

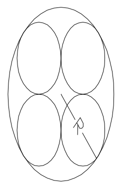
Zadanie 2 (4 pkt.)

Dla jakiej wartości parametru m rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x + y = 3m + 2 \\ 2x + 3y = 7m + 7 \end{cases}$

spełnia warunek $4y^2 = x^2$

Zadanie 3 (3 pkt.)

Gospodyni robiąc zaprawy umieszcza w okrągłym garnku (jak pokazuje rysunek) cztery słoiki w kształcie walca o średnicy podstawy długości 12 cm. Oblicz długość promienia R podstawy garnka.



Zadanie 4 (4 pkt.)

Uzasadnij, ze jeżeli dwie liczby naturalne a i b przy dzieleniu przez 7 mają równe reszty, to różnica kwadratów liczb a i b jest podzielna przez 7.

Zadanie 5 (5pkt.)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - 4}} + \frac{2\sqrt{x}}{(x+5)(x-6)}$.

Odpowiedź podaj używając do zapisu przedziałów.

Drugi Pomorski Konkurs Matematyczny

ETAP WOJEWÓDZKI
18 marzec 2006r.
Klasa druga, poziom podstawowy.
Czas pisania 90 min.

Zadanie 1 (6 punktów)

Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby –2 i 10 .Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt o współrzędnych (2,-8).

a) Wyznacz wzór funkcji.
b) Oblicz, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od –5 .

Zadanie 2 (3 punkty)

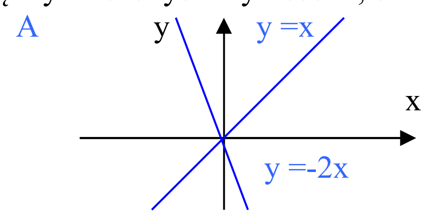
Płetwonurek chce się zanurzyć na głębokość 8 m , płynąc pod kątem 60^0 do tafli wody, aby zaczepić linę zakończoną hakiem do kufra leżącego na dnie. Czy do tej wyprawy wystarczy mu lina długości 10 m ? Odpowiedź uzasadnij wykonując odpowiednie obliczenia(pomiń wysokość kufra).

Zadanie 3 (4 punkty)
Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór $A = \{(x,y) : x, y \in R \wedge 2x^2 - xy - y^2 = 0\}$ można w następujący sposób.

- zauważyć, że : $2x^2 - xy - y^2 = 2x^2 - 2xy + xy - y^2$
- rozłożyć ostatnie wyrażenie na czynniki :

$2x^2 - 2xy + xy - y^2 = 2x(x-y) + y(x-y) = (x-y)(2x+y)$

- wykorzystać fakt, że iloczyn jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z czynników jest równy zero , zatem : $x - y = 0$ lub $2x + y = 0$,
- znaleźć wykresy obu otrzymanych równań,
- znaleźć sumę wyznaczonych wykresów , otrzymując zbiór zaznaczony na poniższym rysunku:



Postępując analogicznie zaznacz na płaszczyźnie zbiór $B = \{(x,y) : x, y \in R \wedge 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0\}$

Zadanie 4 (4 punkty)

Suma długości przyprostokątnych trójkąta jest równa m, przeciwprostokątna ma długość c . Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 5 (3 punkty)

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+1} + 3^n$ jest podzielna przez 16.

Powodzenia !

Drugi Pomorski Konkurs Matematyczny

ETAP WOJEWÓDZKI
18 marzec 2006r.
Klasa druga, zakres rozszerzony.
Czas pisania 90 min.

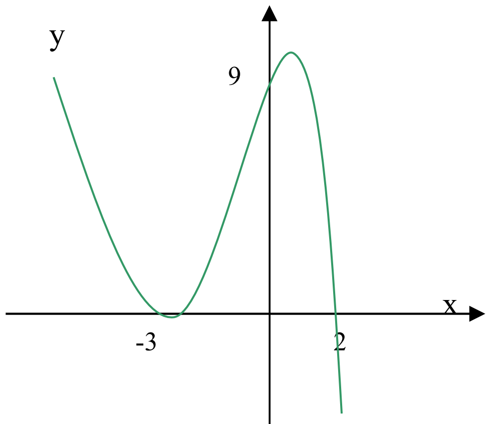
Zadanie 1 (5 punktów)
Równanie $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy równaniem zwrotnym i rozwiązujemy dzieląc obie strony przez x^2, a następnie stosując podstawienie $t = x + \frac{1}{x}$.
Rozwiążemy równanie $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$.

- Dzieląc obie strony danego równania przez x^2 otrzymujemy równanie $3x^2 - 4x - 14 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$, które zapisujemy w postaci $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$.
- Zauważmy, że jeżeli $t = x + \frac{1}{x}$, to $t^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$. Zatem $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.
- Podstawiając $t = x + \frac{1}{x}$ oraz $t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, otrzymujemy równanie $3\left(t^2 - 2\right) - 4t - 14 = 0$, czyli $3t^2 - 4t - 20 = 0$. Rozwiązaniami tego równania są liczby –2 i $\frac{10}{3}$.
- Zatem $x + \frac{1}{x} = -2$ lub $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$.Po pomnożeniu obu stron tych równań przez x , otrzymujemy $x^2 + 1 = -2x$ lub $x^2 + 1 = \frac{10}{3}x$.
- Rozwiązując dwa ostatnie równania otrzymujemy rozwiązania równania zwrotnego : $-1, \frac{1}{3}, 3$.

W podobny sposób rozwiąż równanie $8x^4 + 14x^3 - 69x^2 + 14x + 8 = 0$.

Zadanie 2 (6 punktów)
Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + 4|x| + 6$. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w przedziale $\langle -2;1\rangle$

Zadanie 3 (3 punkty)
Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji wielomianowej stopnia trzeciego $W(x)$. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby -3 oraz 2 . Wyznacz wzór wielomianu $W(x)$.



Zadanie 4 (4 punkty)

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej funkcji liniowej f prawdziwa jest równość
$f(2n+1) + f(2n-1) = 2f(2n)$

Zadanie 5 (5 punktów)

Na okręgu opisano trapez prostokątny. Odległości środka okręgu od końca ramienia pochyłego wynoszą 2 i 4 . Oblicz pole tego trapezu.

Powodzenia !