



Final
Klasy pierwsze
Poziom podstawowy
12 marca 2005r.
Czas 90 min.

Zad.1 (3 pkt.)

Dane jest równanie: $(1 + \sqrt{2})(k - \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$. Wyznacz k .

Wynik zapisz w postaci $a\sqrt{b} + c$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zad.2 (3 pkt.)

Dany jest trójkąt równoboczny XYZ . Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do jego boków odpowiednio w punktach A i B . Długość krótszego łuku AB tego okręgu wynosi 1. Jaki jest obwód trójkąta XYZ .

Zad.3 (3 pkt.)

Oblicz wartość wyrażenia: $\|3x\| + \|x - 1\| - \|x + 1\| + \|3x + 10\|$ dla $x \in (-3; -1)$

Zad.4 (4 pkt.)

W basenie znajduje się $2400m^3$ wody. Przy otwartym zaworze w ciągu minuty można z basenu spuścić $8m^3$ wody.

- Wyraż objętość V wody pozostającej w basenie jako funkcję czasu t . Podaj dziedzinę funkcji.
- Po jakim czasie pozostanie w basenie $800m^3$ wody ?
- Po ilu godzinach basen będzie pusty ?

Zad.5 (4 pkt.)

Prawdą jest, że Ola uczy się w gimnazjum; nieprawdą, że Kasia studiuje; prawdą, że Marysia uczęszcza do „zerówki”. Oceń wartość logiczną zdania:

„Marysia uczęszcza do „zerówki” i nieprawda, że jeśli Ola uczy się w gimnazjum, to Kasia nie studiuje”.

Zad.6 (3 pkt.)

Uzasadnij, że liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10 dla każdej liczby naturalnej dodatniej.

POWODZENIA !!!



Final
Klasy pierwsze
Poziom rozszerzony
12 marca 2005r.
Czas 90 min.

Zad.1 (4 pkt.)

Działanie $*$ w zbiorze liczb rzeczywistych określone jest wzorem: $a * b = 3ab - 2a + b + 1$.
Dla jakiej liczby a prawdziwa jest równość $a * (-12) = (-3) * 5$?

Rozwiązanie:

$$a * (-12) = 3a(-12) - 2a - 12 + 1 = -38a - 11,$$

$$(-3) * 5 = 3(-3)5 - 2(-3) + 5 + 1 = -33,$$

$$a * (-12) = (-3) * 5 \Leftrightarrow -38a - 11 = -33, \text{ stąd } a = \frac{11}{19}.$$

Postępując analogicznie, wyznacz m wiedząc, że $2m * m = 0 * m$.

Zad.2 (3 pkt.)

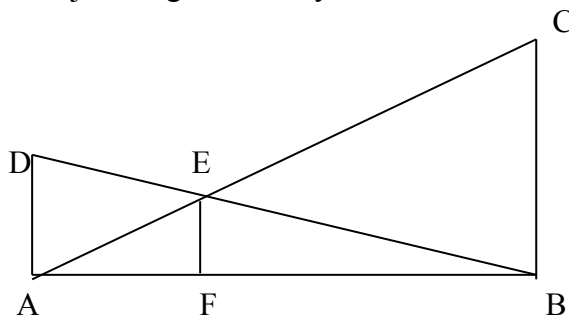
Wykaż, że jeżeli w liczbie trzycyfrowej środkowa cyfra jest równa sumie skrajnych cyfr, to liczba jest podzielna przez 11.

Zad.3 (6 pkt.)

Naszkiej wykres funkcji $g(x) = \sqrt{2x \cdot \frac{|x+2| + |x-2|}{|x+2| - |x-2|}}$ dla $x \in R^-$.

Zad.4 (4 pkt.)

Murarz pracuje w wykopie o szerokości $|AB| = 8m$. Drabiny AC i BD oparte o przeciwległe ściany, krzyżują się na wysokości 2m tzn. $|EF| = 2m$. Drabina AC ma 10m. Jaka jest długość drabiny BD ?



Zad.5 (5 pkt.)

Prawdziwe jest zdanie: *Nieprawda, że jeśli Platon założył Akademię, to jeśli Arystoteles był uczniem Platona, to Arystoteles nie uczęszczał do Akademii.* Czy na podstawie tej informacji można udzielić odpowiedzi na poniższe pytania (jeśli tak, to podaj te odpowiedzi):

- Czy Platon założył Akademię?
- Czy Arystoteles był uczniem Platona?
- Czy Arystoteles uczęszczał do Akademii?

POWODZENIA!!!!



Final

Klasa druga.

Zakres podstawowy.

12 marca 2005 r.

Czas 90 min.

Zadanie 1 (5 punktów)

Park w pewnej miejscowości ma kształt rombu o boku długości 600 m i kącie ostry 60° .

- Oblicz pole powierzchni parku i długości alejek biegnących wzdłuż przekątnych rombu.
- Aby zachęcić mieszkańców do aktywnego wypoczynku zaprojektowano w parku tzw. „ścieżkę zdrowia”, która biegnie wzdłuż odcinków łączących środki boków rombu. Uzasadnij, że alejki „ścieżki zdrowia” są bokami prostokąta. Oblicz długość ścieżki zdrowia.

Zadanie 2 (4 punkty)

Rozważmy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wyznacz współczynniki a i b , wiedząc, że dla każdego $x \in R$ prawdziwa jest równość $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$.

Zadanie 3 (6 punktów)

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej resztę z dzielenia tej liczby przez 4.

- Oblicz $f(17)$, $f(-25)$.
- Narysuj wykres tej funkcji w przedziale $\langle -4; 6 \rangle$.
- Na podstawie wykresu odczytaj miejsca zerowe tej funkcji i ustal jej zbiór wartości.

Zadanie 4 (4 punkty)

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej m liczba $m^6 - 2m^4 + m^2$ jest podzielna przez 36.

Zadanie 5 (5 punktów)

Dane są punkty $A=(1,3)$, $B=(3,0)$ i $C=(4,4)$.

- Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoramienny i prostokątny wykonując odpowiednie obliczenia.
- Znajdź promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
- Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

POWODZENIA !



Final

Klasa druga.
Zakres rozszerzony.
12 marca 2005 r.
Czas 90 min.

Zadanie 1 (3 punkty)

Liczba -7 jest miejscem zerowym wielomianu $W(x)$. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = x^2 + 5x - 14$, jeśli wiadomo, że w wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - 2)$ otrzymujemy resztę 18 .

Zadanie 2 (4 punkty)

Narysuj dowolny odcinek AC i zaznacz jego środek B . Każdemu punktowi P płaszczyzny przyporządkowujemy punkt P' zgodnie z zasadą:

- Jeśli $|PA| < |PC|$, to $P' = A$.
- Jeśli $|PA| > |PC|$, to $P' = C$.
- Jeśli $|PA| = |PC|$, to $P' = B$.

a) Naszkiuj zbiory punktów:

$$K = \{P : P' = A\} \quad L = \{P : P' = B\} \quad M = \{P : P' = C\}$$

b) Narysuj taki odcinek, którego obrazem jest zbiór $\{A, B\}$.

Zadanie 3 (3 punkty)

Znajdź możliwie najniższy stopień wielomianu $F(x) = x^n + x^{n-1} - 121x - 121$; $x \in R$ i $n \in N^+$ wiedząc, że ma on dokładnie trzy miejsca zerowe będące liczbami całkowitymi.

Zadanie 4 (5 punktów)

Funkcja g przyporządkowuje liczbie $a \in R$ liczbę pierwiastków równania $|3x^2 + 2x - 1| = a$. Naszkiuj wykres tej funkcji.

Zadanie 5 (5 punktów)

Na rysunku pokazany jest fragment domku jednorodzinnego. Pewnego słonecznego dnia w południe promienie słoneczne padały pod kątem 60° do poziomu. Oblicz długość okapu dachu (części dachu wystającej poza ścianę budynku) wiedząc, że szerokość zacienionego pasa ziemi wzdłuż ściany budynku była równa 3 m . Pozostałe dane zamieszczono na rysunku.

