III Pomorski Konkurs Matematyczny

ETAP SZKOLNY 19. 01. 2007r.

Klasa pierwsza, poziom podstawowy. Czas pisania 60 min.

W trakcie rozwiązywania zadań nie wolno korzystać z kalkulatora i innych pomocy matematycznych.

Zad.1. (4p) W zbiorze liczb naturalnych określone jest działanie $a \# b = 2b + 1$.

a) Oblicz $0 \# 5$, $4 \# 8$, $2 \# (3 \# 4)$

b) Sprawdź, czy działanie # jest przemienne.

Zad.2. (3p) Aby porównać liczby $3^{40}, 4^{30}, 7^{20}$, można postąpić w podany niżej sposób:

a) Wyznaczamy największy wspólny dzielnik wykładników NWD (40, 30, 20) = 10

b) Każdą z liczb, które mamy porównać, przedstawiamy w postaci potęgi o wykładniku 10.

$3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$, $(4^3)^{10} = 64^{10}$, $(7^2)^{10} = 49^{10}$

c) Korzystamy z twierdzenia: „Jeżeli $1 < a < b < c$ i $n \in N_+$, to $a^n < b^n < c^n$", zatem $49 < 64 < 81$ $\Rightarrow$

$7^{20} < 4^{30} < 3^{40}$.

Postępując w opisany sposób, porównaj liczby $2^{45}, 3^{30}, 5^{20}$.

Zad.3. (3p) Środkowa trójkąta różnobocznego jest równa połowie długości boku, do którego została poprowadzona. Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny.

Zad.4. (5p) Twierdzenie: *„ Liczba czterocyfrowa jest podzielna przez 11 jeśli suma cyfr jedności i setek równa jest sumie cyfr dziesiątek i tysięcy."*

a) Korzystając z podanego twierdzenia sprawdź czy liczba 2376 jest podzielna przez 11.

Podaj założenie i tezę tego twierdzenia. Udowodnij podane twierdzenie.

Zad.5.(4p) Dana jest funkcja $y = \frac{1 - 3x}{2}$.

Naszkicuj wykres tej funkcji.

Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości mniejsze od 1 ?

c) Oblicz pole trójkąta, jaki tworzy wykres tej funkcji z osiami układu współrzędnych.

Życzymy powodzenia !!!

III Pomorski Konkurs Matematyczny

ETAP SZKOLNY 19. 01. 2007r.

Klasa pierwsza, poziom rozszerzony.
Czas pisania 60 min.

W trakcie rozwiązywania zadań nie wolno korzystać z kalkulatora i innych pomocy matematycznych.

Zad.1. (4pkt.)

W zbiorze uporządkowanych par (a, b) liczb rzeczywistych określono działanie * w następujący sposób: $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

a) Oblicz: $(2, 5) * (-1, -2)$, $(a, b) * (1, 0)$

b) Zbadaj czy działanie * jest przemienne.

Zad.2. (5pkt.)

Dane są zbiory $A = \left\{x \in C: \sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 1 - 2x\right\}$ i $B = \left\{x \in R: |x - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{2}\right\}$.

Wyznacz zbiór A, B oraz B \ A.

Zad.3. (4pkt.)

Usuń niewymierność z mianownika (wynik przedstaw w najprostszej postaci)

$$\frac{1}{\sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{35} - \sqrt{14}}.$$

Zad.4. (3pkt.)

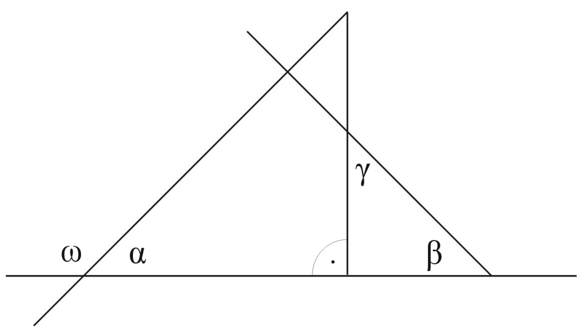
Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej n większej od 1 jej największy dzielnik różny od n.

a) Narysuj wykres funkcji f dla $n \le 10$.

b) Podaj dla jakich argumentów $n \ge 2$ i $n \in N$ funkcja ta przyjmuje wartość 1.

Zad.5. (3pkt.)

Wiedząc, że $\alpha = \beta$, wykaż, że $\omega = 90^o + \gamma$



Życzymy powodzenia!!!

III Pomorski Konkurs Matematyczny

Etap szkolny 19. 01. 2007r.
Klasa druga, poziom rozszerzony.
Czas pisania 60 min.

W trakcie rozwiązywania zadań nie wolno korzystać z kalkulatora i innych pomocy matematycznych.

Zadanie 1 (4p)

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej a liczbę rozwiązań równania $ax^2 + ax + 2 = 0$. Wykonaj wykres funkcji f.

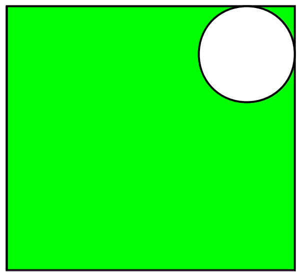
Zadanie 2 (4p)

Wielomian W przy dzieleniu przez dwumiany $(x-1),(x-2),(x-3)$ daje reszty równe odpowiednio 1,2,3 . Znajdź resztę z dzielenia wielomianu W przez wielomian $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Zadanie 3 (4p)

Oblicz pole zacieniowanej figury jeśli czworokąt jest kwadratem, a narysowane łuki są okręgami lub fragmentami okręgów. Nie stosuj przybliżeń.

6



6

Zadanie 4 (3p)

Przeczytaj rozwiązanie poniższego zadania:

Wyznacz $tg\alpha$, wiedząc, że $\frac{1}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{5}{7}$ i $\alpha \in (45^0;90^0)$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli $\frac{1}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{5}{7}$, to $\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{5}{7}$.

Stąd $\frac{tg^2\alpha + 1}{tg^2\alpha + tg\alpha + 1} = \frac{5}{7}$.

Wtedy $\frac{t^2+1}{t^2+t+1} = \frac{5}{7}$, gdzie $t = tg\alpha$. Zatem $t = \frac{1}{2}$ lub $t = 2$.

Uwzględniając warunki zadania otrzymujemy : $tg\alpha = 2$.

Postępując w analogiczny sposób , wyznacz $tg\alpha$, wiedząc że $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{10}{3}$ i $\alpha \in (0^0;60^0)$.

Zadanie 5 (3p)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb *a, b, c* : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

Życzymy powodzenia!!!