Drugi Pomorski Konkurs Matematyczny

ETAP SZKOLNY 17 LUTY 2006r.
Klasa pierwsza, poziom podstawowy. Czas pisania 60 min.

Zad.1 Która z liczb $a = (-4 \cdot 0{,}5^{2n-7}) \cdot (12 \cdot 0{,}5^{10-2n})$ czy $b = \left[27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5m-1}\right] : \left[0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5m-3}\right]$ $n, m \in N$

jest większa i o ile?

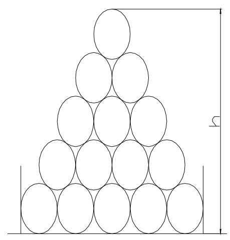
Zad.2 Oznaczmy zdania :

p – Brazylia jest Mistrzem Świata 2002 w piłce nożnej,
q – Mistrzostwa Świata 2002 odbyły się w Korei i w Japonii,
r – Polska zakwalifikowała się do finału piłkarskich Mistrzostw Świata 2002.
Zapisz słownie zdanie $(p \wedge q) \vee \sim r$. Stosując prawa de Morgana, zapisz słownie jego zaprzeczenie.

Zad.3 Trzech miłośników łamigłówek zapytano o ich wiek.

Pan A powiedział: *Teraz jestem 6 razy starszy od syna, ale już za 20 lat będę od niego starszy tylko 2 razy.*
Pan B powiedział: *Cztery lata temu byłem starszy od mojej córki 4 razy, a 10 lat temu byłem starszy od niej 10 razy.*
Pan C powiedział: *Gdy pan B był 2 razy młodszy od pana A, to ja byłem 3 razy młodszy niż będę za 4 lata.*
Ile lat mają panowie A, B, C?

Zad.4 Rury ciepłownicze, każda o średnicy zewnętrznej jednego metra ułożone są w stos, którego przekrój pokazany jest na rysunku. Oblicz wysokość tego stosu.



Zad.5 Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych z dzielenia przez 8 daje resztę 2.

Zad.6 W tabeli podano dla porównania dwa plany taryfowe w ofercie sieci komórkowej Idea:

Plan taryfowy	Idea Optima 15	Idea optima 30
Wysokość abonamentu	30 zł	40 zł
Liczba bezpłatnych minut i bezpłatnych SMS-ów w abonamencie (koszt 1min=koszt 4 SMS-ów)	15 minut lub 60 SMS	30 minut lub 120 SMS
Koszt 1min. Po przekroczeniu pakietu bezpłatnych minut	1 zł 65 gr.	1 zł 35 gr.
Koszt pojedynczego SMS-a po przekroczeniu pakietu bezpłatnych SMS-ów	24 gr.	24 gr.

a) Który plan taryfowy powinna wybrać osoba, która rozmawia średnio 20 minut miesięcznie? Odpowiedź uzasadnij.
b) Pani Topolska w sierpniu zapłaciła rachunek w wysokości 47 zł 4 gr., korzystając z taryfy Idea Optima 15. Przeglądając rachunek Pani Topolska zauważyła, że liczba minut po przekroczeniu pakietu bezpłatnych minut była dwa razy mniejsza niż liczba wysłanych SMS-ów ponad limit. Oblicz ile dodatkowych minut (ponad limit) rozmawiała w sierpniu pani Topolska.
c) Dla obu planów taryfowych napisz wzory wyrażające zależność między wysokością rachunku a liczbą wykorzystanych dodatkowych minut dla osoby, która nie wysłała dodatkowych SMS-ów.

Drugi Pomorski Konkurs Matematyczny

ETAP SZKOLNY 17 LUTY 2006r.
Klasa pierwsza, poziom rozszerzony. Czas pisania 60 min.

Zad.1 Funkcja f każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje liczbę cyfr potrzebnych do zapisu tej liczby w systemie dziesiątkowym.

a) Oblicz $f(3781)$, $f(25700)$, $f(0)$.
b) Podaj zbiór wartości funkcji f.
c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 3?
d) Podaj wszystkie argumenty $n < 3000$ spełniające warunek $f(n+1) = f(n) + 1$.

Zad.2 Implikacja $r \Rightarrow q$ jest fałszywa, natomiast równoważność zdań p i q jest prawdziwa. Oceń wartość logiczną zdania $\{[(\sim p) \wedge q] \vee r\} \Rightarrow [\sim(q \vee r)]$.

Zad.3 Rozwiąż układ równań $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y - |x| - 1 = 0 \end{cases}$

Zad.4 Na wybiegu w kształcie trójkąta o bokach 12 m, 16 m i 20 m, otoczonym wysokim płotem, znajduje się żyrafa. Dzięki swojej długiej szyi może ona skubać trawę na zewnątrz ogrodzenia w odległości 2 m od płotu. Jakie jest w przybliżeniu pole łąki na zewnątrz ogrodzenia, które może żyrafa wyskubać

Zad.5 Wykaż, że $\dfrac{a^2 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} - \dfrac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} + a + 1 = \left(\sqrt{a} - 1\right)^2$

Drugi Pomorski Konkurs Matematyczny

ETAP SZKOLNY
17 LUTY 2006r.
Klasa druga, poziom podstawowy.
Czas pisania 60 min.

Zadanie 1 (2 pkt)

Dany jest wielomian $W(x) = x^{2006} - 2006x^{2005}$. Oblicz $W(2006)$.

Zadanie 2 (3 pkt)

W wycinek koła o promieniu $R = 6$ wpisano koło o promieniu $r = 2$. Oblicz pole tego wycinka.

Zadanie 3 (6 pkt)

Wyznacz zbiory $A \setminus B, A \cap B$ jeśli $A = \{x : x \in R \wedge x^2 + 3x \in (-\infty ;4\rangle\}$ oraz $B = \{x : x \in R \wedge 3 - 4x \in \langle 7;19)\}$.

Zadanie 4 (4 pkt)

Uzasadnij, ze jeśli P jest punktem wewnętrznym pięciokąta wypukłego, to suma odległości punktu P od wierzchołków pięciokąta jest większa od połowy obwodu.

Zadanie 5 (5 pkt)

W pewnym zakładzie pracy zależność przychodów ze sprzedaży od wielkości produkcji wyraża w przybliżeniu wzór $p(n) = 100n$, gdzie n oznacza liczbę sztuk wyprodukowanego towaru, a koszty produkcji , w złotych , określa zależność $k(n) = n^2 - 60n + 4800$.

a) Napisz wzór funkcji $z(n)$ - zależności zysku zakładu od wielkości produkcji, jeśli wiadomo, że zysk jest różnicą między przychodem zakładu a kosztami produkcji.
b) Przy jakiej wielkości produkcji zysk wynosi 0 ?
c) Jaka wielkość produkcji zapewnia największy zysk ?Jaki jest koszt produkcji, gdy zysk jest największy ?

Drugi Pomorski Konkurs Matematyczny

ETAP SZKOLNY
17 LUTY 2006r.
Klasa druga, zakres rozszerzony.
Czas pisania 60 min.

Zadanie 1 (3 pkt)

Naszkicuj wykres dowolnej funkcji g, która ma następujące własności

- dziedziną funkcji g jest przedział $\langle -5;5\rangle$, a zbiorem wartości $\langle -6;6\rangle$,
- g jest funkcją nieparzystą,
- w przedziale $(-5;-2)$ funkcja g jest rosnąca, a w przedziale $(-2;0)$ funkcja jest malejąca.

Zadanie 2 (4 pkt)

Wiadomo, że dla pewnego kąta ostrego α zachodzi związek
$\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}1$. Oblicz :

a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, b) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Zadanie 3 (5 pkt)

Zbadaj, ile różnych rozwiązań w zależności od parametru $n \in N_+$ ma równanie
$x^{3n} + 2x^{2n} - 9x^n - 18 = 0$.

Zadanie 4 (5 pkt)

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór $A \cap B$ jeśli
$A = \{(x, y) : x, y \in R \wedge x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 < 0\}$ oraz
$B = \{(x, y) : x, y \in R \wedge y < -2|x + 3| + 3\}$.

Zadanie 5 (5 pkt)

W trójkącie ABC dany jest wierzchołek $A = (-4,-1)$, punkt $S = (2,1)$, który jest środkiem boku AB oraz wektor $\vec{BC} = [-4,4]$. Oblicz pole trójkąta ABC.